

Warum Mathematik?

Problemspezifische Sprachen und Denken

Prof. Dr. rer. nat. habil. Manfred Peschel,
Korr. Mitglied der AdW der DDR,
Leiter des Forschungsbereichs
Mathematik/Kybernetik der AdW der DDR
Dr. phil. habil. Rainer Thiel,
Berlin

Falsche Formeln

Aus der Geschichte ist bekannt, daß nützliche Anwendung von Daten und Algorithmen mit falschen Theorien koexistieren kann. Ein klassischer Fall ist die astronomische Zeitbestimmung, die jahrhundertlang allen praktischen Anforderungen genügte, obwohl mit ihr die Auffassung von der Erde als Grundplatte der Himmelskugel verbunden war.¹⁾ Aus der Geschichte ist ebenfalls bekannt, daß es auf die Dauer dennoch nicht gleichgültig ist, ob eine falsche Theorie abgelöst wird oder nicht.

Diese Erfahrungen gelten auch für die Anwendung mathematischer Ausdrücke und Lehrsätze: Die Applikation von Ergebnissen der Mathematik in den Bereichen anderer Wissenschaften ist in der Regel begleitet von Auffassungen, die man gerade soweit als berechtigt ansehen kann, wie das ptolemäische Weltbild zur Zeit seiner Entstehung. Wo aber heute Einsatzmöglichkeiten der Mathematik zu erweitern, zu vertiefen oder auch nur verständlich zu machen sind, wirken diese Auffassungen desorientierend. Worin bestehen sie?

○ In der Annahme, daß die Mathematik genau die Wissenschaft des Quantitativen sei und genau in dieser Rolle mit anderen Disziplinen zusammenwirke („Quantitäts-idol“) sowie

○ in Assoziationen, die intuitiv zu einem kaum durchschaubaren Komplex verknüpft sind, der gemeinhin als „Formalisierung“ bezeichnet wird („Formalisierungsfloskel“).

Daß das sog. Quantitätsidol nicht aufrechterhalten werden kann, läßt sich in zwei Schritten zeigen:

a) Jedes der Worte „Quantität“ und „Qualität“ hat rund ein Dutzend verschiedene, zum Teil weit divergierende Bedeutungen (f). Die Mehrzahl dieser Bedeutungen bringt objektiv differenzierte Sachverhalte zum Ausdruck.

b) Die meisten Bedeutungen des Worts „Qualität“ oder „qualitativ“ sind auch für Gegenstände der Mathematik charakteristisch. Die Anwendung mathematischer Begriffe ist zur Analyse von objektiven Sachverhalten entscheidend, die mit dem Terminus „Qualität“ bezeichnet oder für die Grundlage solcher Sachverhalte gehalten werden. Das gilt beispielsweise für Phänomene wie Stabilität und Struktur; das gilt aber auch für die Menge-Element-Beziehung, den Gegenstand der mathematischen Mengenlehre – die seit Jahrzehnten als mathematische Disziplin unumstritten ist.

Der Brauch, Mathematisierung und mathematische Modellierung als Formalisie-

rung zu bezeichnen, lenkt vom Wesen der Sache ab oder ist einfach falsch. Versteht man den Terminus „Formalisierung“ in dem Sinn, in dem er in der mathematischen Grundlagenforschung gebraucht wird, so muß man sagen, daß die Mathematik in der Regel gar nicht „formalisiert“ dargeboten wird – was ihrem Studium und ihrer Anwendung sehr zugute kommt. Versteht man den Terminus so, wie er außerhalb der mathematischen Grundlagenforschung gebraucht wird („Formalisierungsfloskel“), so ist bisher immer offengeblieben, was gemeint ist. Einem oft vollzogenen, aber noch wenig erforschten Vorgang wird damit nur ein Etikett aufgedrückt, zudem ein solches, das falsche Erwartungen hervorruft (denken wir z. B. an den Begriff „formales Herangehen“).

Ein neuer Ansatz: Sprache und Denken – Mathematik

Um die grundlegenden Tatsachen aus dem inhaltsreichen, aber in der Regel nicht reflektierten Prozeß der Mathematik-Anwendung herauspräparieren zu können, wurde ein Ansatz geschaffen, der die Anwendung der Mathematik korrekt zu erklären erlaubt und beitragen kann, dem multifidisziplinären Erkenntnisfortschritt neue Wege zu ermöglichen. Zugleich wird durch diesen Ansatz die Verantwortung konkretisiert, die die Repräsentanten jeder einzelnen Disziplin für Fortschritte in der Mathematik-Anwendung tragen.

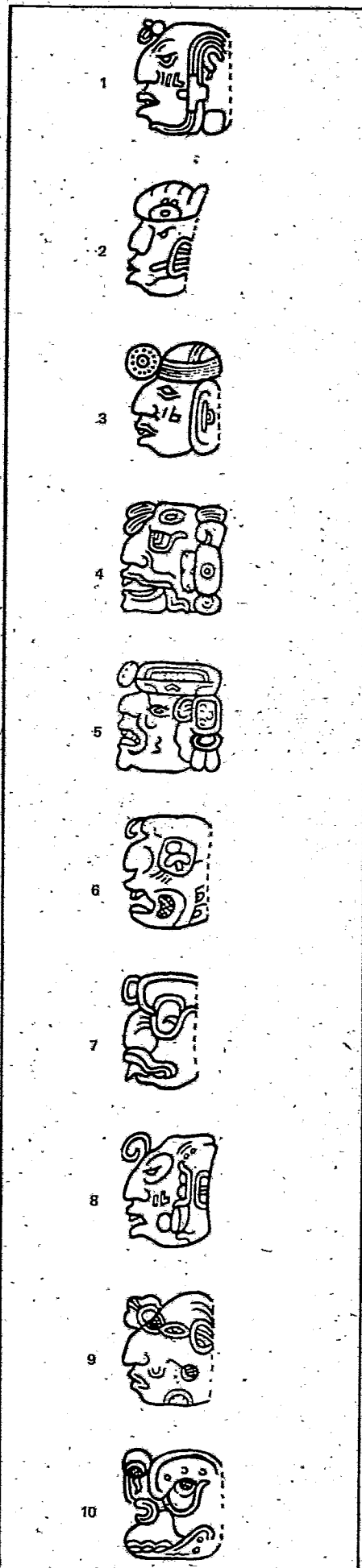
Der Ansatz beruht auf drei Aussagen zum Verhältnis von Sprache und Denken im Erkenntnisprozeß:

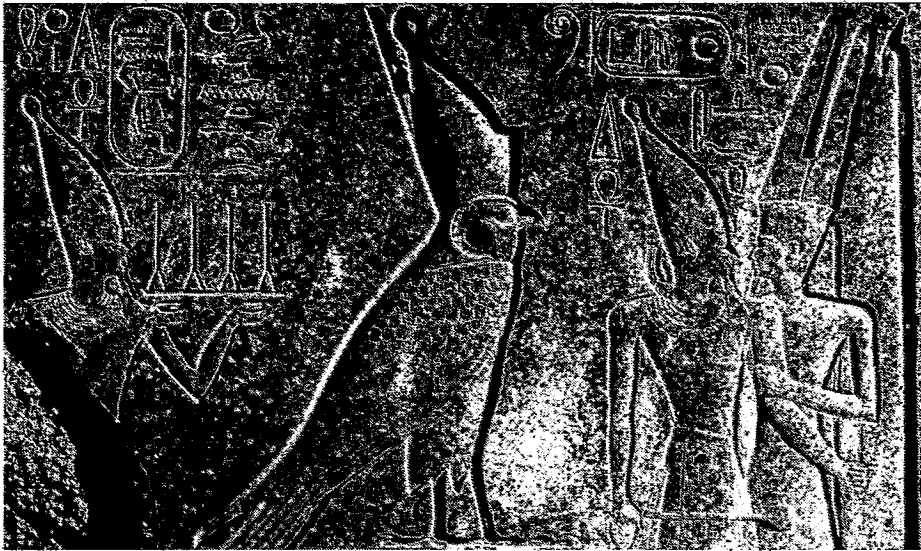
1. Die Sprache ist „unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens“ (Marx), das Bewußtsein ist an physiologische Prozesse gebunden. Es äußert sich „in der Form der bewegten Luftschichten, Töne, kurz, der Sprache“ (Marx).

2. Der traditionelle Sprachbegriff ist zu erweitern. Der Ingenieur z. B. denkt überwiegend in bildanalogen Darstellungen (zwei- und dreidimensionalen Konfigurationen – wie Blockschaltbildern und Schaltplänen); jeder Mensch macht von dieser Möglichkeit Gebrauch, um zu denken. Das zwingt – in Verbindung mit der von Marx aufgestellten These von der „unmittelbaren

¹⁾ Siehe Wiss. u. Fortschr. 27 (1977) 12, S. 540, Wiss. u. Fortschr. 32 (1982) 5, S. 190 und 9, S. 357

Die Maya-Indianer benutzten diese Bildzeichen als Symbole für die Zahlen 1...10.





Wirklichkeit des Gedankens“ — zu folgenden Aussagen:

○ Jeder (eingermaßen ausdrucksfähige) Zeichen- oder Bildervorrat samt Satzregeln (Syntax) und die zugehörige Bedeutung (Semantik) ist eine Sprache. Die Semantik kann ihrerseits in Zeichen oder Bildern ausgedrückt werden (vgl. Abb. 1 und 2).

○ Sprache im traditionellen Sinn des Wortes einerseits und bildanaloge Darstellung oder Bild andererseits sind Systeme verschieden modulierter physikalischer oder physiologischer Prozesse und Zustände.

Dementsprechend sind Sprache im traditionellen Sinn des Wortes und bildartige Darstellung gemeinsam „unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens“. Die Unterschiede zwischen ihnen sind unter dem Gesichtspunkt zu sehen, daß sie allesamt vom Menschen als „unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens“ benutzt werden. Man muß also beachten, daß sie unterschiedlich geeignet sind, als „unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens“ zu dienen. Es geht also nicht darum, ihre Unterschiede zu ignorieren, sondern den Punkt zu finden, von dem ihre Funktion im Erkenntnisprozeß zu begreifen ist. Die von Marx gestellte und teilweise beantwortete Frage, „Was ist unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens?“, ist dieser Punkt. Übereinstimmend mit den Intentionen von Marx und mit wohlmotivierten Gepflogenheiten im aktuellen Wortgebrauch benutzen wir, um die Klasse aller Phänomene, die unmittelbare Wirklichkeit des Gedankens sind, zu bezeichnen, ebenfalls das Wort „Sprache“ — und nennen sie „Sprache v.“, d. h. „Sprache im verallgemeinerten Sinn“. Der Sprachbegriff wird damit aus seiner philologischen Enge herausgeführt und auf interdisziplinäres, erkenntnistheoretisches Niveau gehoben.

Nun kann man sich für die stoffliche Natur der unmittelbaren Wirklichkeit des Gedankens interessieren — für das Trägermedium. Dies ist allein unter den Gesichtspunkten des Übertragens und Speicherns von Gedanken sowie der Modulierbarkeit des Trägermediums interessant. Man kann auch danach fragen, wie sich verschiedene Kodierformen für den Denkprozeß eignen und diese verschiedenen Kodierformen als

Arten der Gattung „Sprache (v.)“ betrachten. Das soll im folgenden geschehen.

3. Die soeben getroffene Verallgemeinerung eröffnet neue Einblicke in das Verhältnis zwischen dem Denken und seiner unmittelbaren Wirklichkeit, der „Sprache v.“

Erstens: Die Gattung „Sprache v.“ existiert in vielen Arten; es gibt nicht nur die Sprache im traditionellen Sinn des Wortes und die bildanalogen Sprachen, sondern auch viele Mischformen der beiden Grundtypen, z. B. die Notensprache. Offensichtlich sind auch durch die Mathematik viele sprachliche Existenzformen der Gedanken geschaffen worden.

Zweitens: Warum behaupten sich so viele Arten im Rahmen der Gattung „Sprache v.“? Warum entstehen immer wieder neue?

Weil die verschiedenen Arten problemspezifische Existenzformen für problemlösendes Denken sind. Der Differentialkalkül mit seiner Symbolik, seinem Ausdrucksbestand und seinen Umformungs-(rechen-)regeln ist eine problemspezifische Sprache zum Denken über Dynamik-Probleme. Der Aussagenkalkül mit seiner Symbolik, seinem Ausdrucksbestand und seinen Umformungsregeln ist eine problemspezifische Sprache zum Denken über aussagenlogische und über binäre schaltungstheoretische Verknüpfungen (z. B. der Mikroelektronik). Auch Fachsprachen im Sinn der Informatik haben den Charakter problemspezifischer Sprachen für Teildisziplinen. Die einzige Art der Gattung „Sprache v.“, die nicht problemspezifisch, sondern universell (wenn auch für bestimmte Zwecke sehr ineffektiv) ist, ist die sog. natürliche oder Allgemesprache. Sie ist verallgemeinert gesehen die „Muttersprache v.“ in bezug auf die problemspezifischen Sprachen (die Host-Sprache der Informatik).

Drittens: Die Arten der Gattung „Sprache v.“ sind Existenzformen für Gedanken; diese Existenzformen wirken auf die Bewegung ihres Inhalts zurück (s. Abb. 4).

Problemspezifisch der Arten der Gattung „Sprache v.“ bedeutet, daß die Bewegung von Gedanken — das Denken — problemspezifisch begünstigt wird. Beispielsweise begünstigt die problemspezifische Sprache „Differentialkalkül“ das Denken über Dynamikprobleme.

Viertens: Universell nutzbare natürliche



Abb. 2 Ägyptische Hieroglyphen im Obeliken der Pharaonin Hatschepsut (18. Dynastie, 15. Jh. v. u. Z.) im Amun-Tempel von Karnak; die Pharaonin ist zwischen dem Reichsgott Amun (rechts) und dem falcken-gestaltigen Gott Horus (links) dargestellt.

Abb. 3 Gotthold Ephraim Lessing (1729 bis 1781) vergleicht in seiner kunstwissenschaftlichen Streitschrift „Laokoon oder über die Grenzen der Malerei und Poesie“ Literatursprache und Sprache des Bildwerks als unmittelbare Wirklichkeit von Gedanken. Sein Vergleich erhellt die spezifischen Anschauungsmöglichkeiten von Schrift und Figur: „Wenn es wahr ist, daß die Malerei zu ihren Nachahmungen ganz andere Mittel oder Zeichen gebraucht als die Poesie, jene nämlich Figuren und Farben in dem Raume, diese aber artikulierte Töne in der Zeit; wenn unstreitig die Zeichen ein bequemes Verhältnis zu dem Bezeichneten haben müssen; so können nebeneinander geordnete Zeichen auch nur Gegenstände, die nebeneinander, oder deren Teile nebeneinander existieren, aufeinander folgende Zeichen aber auch nur Gegenstände ausdrücken, die aufeinander oder deren Teile aufeinander folgen.“ Koexistierende Dinge seien deshalb der Gegenstand der bildenden Kunst, Handlungen die Gegenstände der Literatur. „Gesetzt nun“, schrieb Lessing, „der Dichter führe uns in der schönsten Ordnung von einem Teile des Gegenstandes zu dem anderen; gesetzt, er wisse uns die Verbindung dieser Teile auch noch so klar zu machen: Wieviel Zeit braucht er dazu? Was das Auge mit einmal übersieht, zählt er uns merklich langsam nach und nach zu, und oft geschieht es, daß wir bei dem letzten Zuge den ersten schon wieder vergessen haben.“ Das Bild dagegen bietet dem Auge die betrachteten Teile zugleich. Für das lesende Organ sind die wahrgenommenen Teile verloren, und bleiben sie im Gedächtnis zurück — „welche Anstrengung kostet es, ihre Eindrücke alle in eben der Ordnung so lebhaft zu erneuern, sie nur mit einer mäßigen Geschwindigkeit auf einmal zu überdenken, um zu einem etwaigen Begriffe des Ganzen zu gelangen.“ (1)

Sprache und problemspezifische Sprachen stehen zueinander im Verhältnis wie die menschliche Hand und die von ihr geschaffenen problemspezifischen Werkzeuge oder wie die universelle Kombizange zu spezifischen Zangen wie Beißzange, Rohrzange, Abisolierzange, zahnspezifische stomatologische Zangen usw.

Fünftens: Wenn die Sprache das Denken beeinflusst, so muß man denkend die Sprache gestalten. Man muß problemspezifische Sprachen bewußt und zielstrebig anwenden; man muß sie — falls erforderlich — bewußt und zielstrebig ausarbeiten. Wenn das Denken im Gebrauch der Sprache — letztere als dessen unmittelbarer Wirklichkeit — entwickelt wird, so muß man die Sprache denkend entwickeln (Prinzip der aktiven und zielstrebigem Sprachgestaltung).

Die Verwendung dieses Prinzips unterliegt dem Kriterium: Wie verhält sich beim Ausarbeiten problemspezifischer Sprachen die Größe des Aufwands zum Nutzen? Um ein praktikables Kriterium zu erhalten, muß festgestellt werden, worin die Elemente der Problemspezifik von Sprachen bestehen und wie sie das Denken begünstigen. Vor allem für die nützliche Anwendung problemspezifischer Sprachen ist vorzusetzen, daß man das Wirkprinzip solcher Sprachen versteht. Die Grundzüge ihrer Wirkweise sollen im folgenden in zwei Gruppen zusammengefaßt werden.

Erste Gruppe von Merkmalen problemspezifischer Sprachen

○ Der „Zeilenzwang“ der Umgangssprache beim Anordnen von Zeichen — d. h. der Zwang zu einer im wesentlichen serienalen, sukzessiv abzuarbeitenden Anordnung von Sprachelernen — wird durchbrochen. Wichtig sind vor allem flächige, einschließlich bildanaloger Konfigurationen (z. B. Gleichungssysteme und Matrizen oder Graphen). Dadurch wird es möglich, die erstmals von G. E. Lessing (Abb. 3) beschriebenen Vorzüge der serienalen Umgangssprache einerseits und die der bildhaften Darstellung andererseits auszunutzen, um (serial, in der Zeit verlaufende) Vorgänge und um Koexistierendes (d. h. Systeme) ihrer objektiven Struktur getreu widerzuspiegeln — und damit die widerspiegelnde Darstellung so übersichtlich wie nötig zu gestalten. So lassen sich, beispielsweise durch flächenausnutzende Darstellung mit einem Blick Einsichten in die Struktur eines Gleichungssystems gewinnen. Für geordnete Folgen von Ereignissen genügt es, serial zu notieren. In der Praxis hat man es jedoch meist mit Verzweigungen und Rückkopplungen zu tun. Dann sind serial organisierte Sprachmittel geradezu lästig; man muß immer wieder an Verzweigungsstellen zurückkehren und dabei Textteile wiederholen.

Der Schriftsteller hat stets einen sehr komplizierten Gegenstand zu bearbeiten. Und er muß ihn mit beschränkten Sprachmitteln abbilden. Simultane und miteinander wechselwirkende Erscheinungen soll er in einer serienalen Zeichenkette auf das Papier bannen. Die ebenso komplexe wie dynamische Wirklichkeit muß dabei mühevoll und so geschickt in die serielle Zeichenkette



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 bis 1716):

„Wenn man Charaktere oder Zeichen finden könnte, die geeignet wären, alle unsere Gedanken ebenso . . . auszudrücken, wie die Arithmetik die Zahlen oder die analytische Geometrie die Linien ausdrückt, könnte man offenbar bei allen Gegenständen . . . tun, was man in der Arithmetik und der Geometrie tut. Denn alle Forschungen . . . würden durch die Umwandlung . . . und eine Art Kalkül zustande kommen, was die Erfindung schöner Dinge ganz leicht machen würde . . . Und wenn jemand an dem, was ich hervorgebracht haben würde, zweifelte, würde ich zu ihm sagen: ‚Rechnen wir, mein Herr!‘, und Feder und Tinte nehmend, würden wir uns bald aus der Verlegenheit ziehen.“ Eine solche Sprache wird „vortrefflich der Verbindung zwischen mehreren Völkern dienen.“ Sie hätte überdies eine vortreffliche Eigenschaft, nämlich, „den Ignoranten den Mund zu schließen. Denn man wird in dieser Sprache nur sprechen und schreiben können, was man versteht; oder . . . es wird eines von zwei Dingen eintreten: Entweder die Leerheit des Vorgebrachten wird jedem offenbar, oder man lernt schreibend oder sprechend. Wie denn tatsächlich die, welche rechnen, beim Schreiben lernen und die, welche sprechen, manchmal Einfälle haben, an die sie (vorher — R. Th.) nicht dachten, wobei also die Sprache dem Gedanken vorausseilt, was besonders in dieser Sprache wegen ihrer Strenge vorkommen wird. Ebenso wird es hier keine Mehrdeutigkeiten und Zweideutigkeiten geben . . .“ Eine solche Sprache würde die Macht der Vernunft steigern, so „wie das Fernrohr dazu dient, das Sehen zu vervollkommen.“

Leibniz sah aber noch nicht, daß der Werkzeugcharakter der Sprache insgesamt vor allem mittels problemspezifischer Sprachen verwirklicht wird und daß auch die Exaktheit der Mathematik — soweit sie sprachlichen Ursprungs ist — gerade der Problemspezifik ihrer Sprachen entspringt (1, S. 122 ff.); (3, S. 18, 255).

projiziert werden, daß dennoch nicht der Eindruck des Bruchstückhaften entsteht, sondern daß eine dialektische Ganzheit empfunden wird. Das kann der Schriftsteller nur erreichen, indem er den Leser ständig zur unbewußten Interpretation anregt, so daß dieser freiwillig das ihm mitgeteilte Gerüst aus seiner Erinnerung mit Leben füllt. Dieselbe Schwierigkeit tritt zwangsläufig auch bei wissenschaftlichen Texten und Organisationsanweisungen auf. Hier muß sich der jeweilige Autor aber nicht auf seriatextliche Darstellungsmittel beschränken. Er kann vielmehr flächennutzende Sprachmittel heranziehen, z. B. Graphen in Form von Netzwerken ohne und mit Schleifen oder Baumstrukturen (2, S. 16; 1, S. 153 ff.) Er erspart damit sich selbst und dem Leser viel Arbeit.

○ Aufgrund der Problemspezifik wird es möglich, nicht nur die Anzahl der Bedeutungen pro Wort oder Zeichen bis auf eine einzige Bedeutung zu reduzieren, sondern auch mit einer begrenzten Zahl von Begriffen auszukommen. Das gilt um so mehr, als in der Mathematik für bestimmte Gedanken (Erläuterungen, Kommentare) durchaus umgangssprachliche Denk- und Ausdrucksmittel im Wechsel mit problemsprachlichen herangezogen werden. Das schafft günstige Möglichkeiten, in den problemspezifischen Textteilen Abkürzungen zu verwenden, darunter suggestiv gestaltete Symbole (z. B. das Zeichen für das bestimmte Integral). Das wiederum führt zu Gewinn an Übersichtlichkeit von Texten, mit denen man sich beim Problemlösen auseinandersetzen muß. Übersichtlichkeit zu schaffen ist ein wichtiger Schritt beim Problemlösen.

○ Problemspezifik einer Sprache wirkt sich auch dadurch vorteilhaft aus, daß man — bei insgesamt eingeschränktem Wortbestand — hinsichtlich der Sachverhalte „auf die es ankommt“, Zeichen oder Begriffe zu hinreichend differenzierter Auswahl zielstrebig schaffen kann. Dadurch wird in den entscheidenden Punkten des Problemlösungsprozesses ein höherer Grad von Konkretheit der Aussage erreicht als mit lediglich umgangssprachlichen Mitteln (3, S. 47–49, 255). Diesen Effekt nutzt man auch mit disziplinspezifischen Fachsprachen. Nur sind die mathematischen Sprachen nicht auf exklusiv disziplinspezifische, sondern auf Querschnittsprobleme mit disziplinären Anwendungen orientiert, z. B. auf Probleme der Dynamik und der Wechselwirkung oder der Analyse komplexer Systeme und stochastischer Prozesse. Hieraus erklärt sich, daß Friedrich Engels betonte, die Mathematik befasse sich mit gewissen realen Verhältnissen „in ihrer Reinheit“ (9).

Probleme der Dynamik und der Wechselwirkung, die Analyse komplexer Systeme und stochastische Prozesse haben aber ihre eigene, spezifische „Problematik“, und sie existieren in allen Bereichen wissenschaftlicher Aktivität. Hier ist die disziplinäre durch die querschnittlich angelegte Betrachtung zu ergänzen.

Mittels querschnittlicher Betrachtung wird für die Dauer der Untersuchung die Schnittstelle zwischen Wesentlichem und Unwesentlichem verlegt: Was an einem Problem am meisten interessiert — z. B. die Struktur der Wechselbeziehung seiner Kom-

ponenten —, kann in den Mittelpunkt der Aufmerksamkeit gerückt werden (1, S. 63, 170 ff.; 2, S. 17–23; 5, S. 252, 255). Eben dadurch wird garantiert, daß problemspezifische Sprachen hinsichtlich der Probleme, „auf die es ankommt“, zu viel differenzierterem Ausdruck geeignet sind als die Allgemeinsprache. Man vergleiche: Die Umgangssprache verfügt zum Formulieren von Dynamikproblemen im wesentlichen über die Wörter Weg, Zeit, Geschwindigkeit und Beschleunigung. In der einschlägigen problemspezifischen Sprache lassen sich, ausgehend vom Begriff des Differentialquotienten, vielfältige Wörter bilden, die in Differentialgleichungen zu nuancierten, bestimmungsreichen, also konkreten Aussagen zusammengefaßt werden.

Die im entscheidenden Punkt konzentrierte Fähigkeit einer problemspezifischen Sprache, fein zu unterscheiden, ermöglicht ein konkretes Vorgehen beim Problemlösen. Das erleichtert zugleich das Denken auch dadurch, daß komplexe Sachverhalte zusammenfassend bezeichnet werden können. Darin besteht nach Klix eine der entscheidenden kognitiven Funktionen der Sprache (5, S. 10, 253, 256 ff., 262, 264). Der Sprachkundige besitzt dann auch einen geschärften Sinn für das Gewährwerden von Sachverhalten. Das ist durch psychologische Beobachtungen und Experimente belegt (6, S. 581 f., 595, 600, 609, 640); (7, S. 251); (8, S. 296 f., 306).

In problemspezifischen Sprachen möglich: Rechnen (Merkmalsgruppe zwei)

Betrachten wir hier die zur zweiten Gruppe zusammenfaßbaren Merkmale. Als typischer Grundzug der Mathematik wird im allgemeinen angesehen, daß „gerechnet“ wird. Rechnen ist äquivalentes Umformen von Texten nach einem Satz fester Regeln (die eine ähnliche Funktion haben wie Spielregeln). Wozu es dient, läßt sich an einem vertrauten Beispiel erläutern:

In Gleichungen sind Größen miteinander verflochten — in der Regel so innig, daß die Gleichung als ein dialektisches, zunächst aber auch nichtsnutziges Knäuel erscheint. Gestellt ist also das Problem, das Knäuel zu entwirren. Verdeutlichen wir das an der Gleichung 2. Grades:

$$x^2 + ax + b = 0. \quad (1)$$

Gesucht ist eine Gleichung der Art

$$x = \dots \quad (5)$$

An diesem Beispiel kann man einige Grundzüge jeglichen Problemlösens erkennen:

- Man muß eine Anzahl von Lösungsansätzen erzeugen, um überhaupt in das Problem einigermaßen eindringen zu können.
- Die Lösungsansätze müssen zu Hypothesen über den Aufbau von Lösungsschritten genutzt werden, denn Probleme lassen sich meist nur schrittweise lösen.
- Lösungsansätze und -schritte können u. a. dadurch erzeugt werden, daß man die Sachverhalte umformuliert, die durch die Lösungsansätze und Lösungsschritte beschrieben werden. Das Umformulieren von Aufgaben ist psychologischen Forschungen zufolge ein erstrangiges Mittel zum Lösen von Problemen (4, 5, 8, 10).
- Die Gesamtheit der Lösungsansätze und



Abb. 5 Nach E. B. Condillac (1715–1780), französischer Philosoph und Aufklärer, sind Sprachen generell Mittel der Erkenntnis, der Analyse. Das Bedürfnis nach einer guten Sprache sei objektiv um so größer, je komplizierter das vorgelegte zu lösende Problem ist. Die Sprachen üben ihre heuristische Funktion folgendermaßen aus: Indem ein Wort Symbol einer (komplexen) Idee ist, wird im Denkkakt, der stets auch vom Gedächtnis Gebrauch macht — um so mehr, je komplizierter das vorgelegte Problem ist — der natürliche menschliche Speicher entlastet (Unterprogrammtechnik!). Dies wiederum geschieht um so effektiver, je besser die sprachlichen Zeichen „ausgewählt“ sind und je adäquater die Struktur der Sprache der Struktur des Forschungsobjektes angepaßt ist. Die natürliche Sprache ist in dieser Hinsicht mit Mängeln behaftet. „Seit unsere Sprache uns die Analogie, nach der die Zahlen sich zusammensetzen, verbirgt, ist es nicht verwunderlich, daß sie uns nicht erkennen läßt, wie wir die Zahlen zerlegen können.“

Zu Condillacs Zeiten entstanden problemspezifische Sprachen nur spontan und vergleichsweise langsam. Im Unterschied zu Leibniz forderte er nicht, solche Sprachen planmäßig zu entwickeln; jedoch erkennt er, daß die Kunst des wissenschaftlichen Schließens vorankommen konnte, weil die Sprachen vorankamen. Die „Algebra ist ein besonders schlagender Beweis dafür, daß die Fortschritte der Wissenschaften von den Fortschritten der Sprachen abhängen und daß nur gut gebildete Sprachen der Analyse jenen Grad von Einfachheit und Präzision verleihen können, dessen sie je nach Art unserer Studien fähig sind.“

Nach treffender schrieb 100 Jahre später G. Frege, der bedeutendste unter den Begründern der modernen Logik: Da Begriffe nicht mehr das einzelne Ding, „sondern das ihnen Gemeinsame“ bezeichnen, sind sie an sich unschaulich. Aber sie bedürfen „eines anschaulichen Vertreters, um uns erscheinen zu können. So erschließt uns das Sinnliche die Welt des Unsinnlichen.“ „Die Zeichen sind für das Denken von derselben Bedeutung wie für die Schifffahrt die Erfindung, den Wind zu gebrauchen, um gegen den Wind zu segeln.“

-schritte muß zum Zweck des Aufbaus einer Kette, die vom Start bis zum Ziel der Lösung führt, überschaubar sein. Die Schwierigkeit, den Überblick zu halten, nimmt mit der Komplexität des Problems überproportional zu. Denkhilfen sind deshalb um so wichtiger.

e) Die Umformulierungen, überhaupt alle Lösungsschritte, müssen kontrollierbar sein, ob sie auch richtig sind.

f) Die genannten Faktoren des Problemlösens werden noch wirksamer, wenn als äquivalent erkannte Ausdrücke innerhalb eines bestimmten Rahmens überall, d. h. ohne Rücksicht auf den Kontext, in den sie eingebettet sind, untereinander ausgetauscht werden können.

Anhand der quadratischen Gleichung kann man sich vom Wert dieser Grundzüge überzeugen:

Beim Aufbau von Lösungsansätzen (zunächst hypothetischen, deren Brauchbarkeit sich erweisen muß) wird man auf folgenden Ausdruck stoßen, der gewisse Ähnlichkeiten mit Gl. (1) aufweist:

$$x^2 + 2px + p^2 = 0. \quad (2a)$$

Hier wüßte man gleich, wie das Problem zu lösen ist. Man formte (entsprechend den Binomischen Formeln) äquivalent um in

$$(x + p)^2 = 0 \quad (3a)$$

und hätte sofort $x = -p$ (4a) als Lösung.

Man könnte sich übrigens vorstellen, daß (2a) mit Hilfe einer heuristischen Regel aus Gl. (1) abgeleitet wurde. Diese Regel könnte lauten: Suche zu einer Eingangssituation — im vorliegenden Fall Gl. (1) — ähnliche Situationen, darunter etwa (2a), bewerte diese zunächst überschlägig daraufhin, ob die Beziehungen zur Eingangssituation und zur Ausgangssituation — (im vorliegenden Fall zu (1) und (5)) — herstellbar sind, und stelle diese Beziehungen dann zweifelsfrei her. Dazu müssen diese (in der Regel selbst wieder über mehrere Zwischenglieder) aufgebaut werden (s. o.). Damit entsteht ein Weg, Gl. (2a) legal und gleichsam als Katalysator zum Lösen des vorgelegten Problems zu nutzen. Dazu sind wiederum einige Schritte nötig, die völlig kontrollierbar vollzogen werden können. Wir kürzen diesen Prozeß jedoch ab und versuchen, von (1) in nur vier Schritten zum Ziel zu kommen. Man wird erkennen, daß die Idee, die von (2a) nach (4a) führte, Auswahl und Anordnung der jetzt folgenden Schritte gesteuert hat: (1) wird kontrollierbar äquivalent umgeformt in

$$x^2 + ax + \frac{a^2}{4} + b - b = \frac{a^2}{4} - b. \quad (2)$$

Das ist zugleich — wie beabsichtigt — kontrollierbar äquivalent mit (2a), wenn man die Möglichkeit gebraucht, folgende Hilfsgrößen (gleichsam Katalysatoren) auszuwählen und festzulegen: $2p = a$, $p^2 = b$. Und jetzt findet man leichter nach dem Vorbild der bekannten Lösung von (2a), eine ebenfalls kontrollierbar äquivalente Umformung von (2) in

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - b \quad (3)$$

Das ist — abermals kontrollierbar — äquivalent zu

$$x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (4)$$

und das ist endlich kontrollierbar äquivalent zu

$$x_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b} \quad (5)$$

Das ist der vertraute Lösungsprozeß der quadratischen Gleichung, ein einfaches Beispiel für das Problemlösen mit Hilfe von Umformungen des Problems. Entscheidend für das Finden und den Nachweis der Lösung waren die genannten Grundzüge a) bis c). Diese Grundzüge waren hierbei in ihrer Gesamtheit, in gegenseitiger Beziehung, wirksam. Daß sie im vorliegenden Beispiel so exzellent verwirklicht sind, ergibt sich aus den Grundeigenschaften problemspezifischer Sprachen, die wir in einer ersten Gruppe von Merkmalen zusammengefaßt hatten.

Natürlich werden diese Grundzüge auch bei allgemeinsprachlich gebundenem Problemlösen praktiziert, also wenn man ausschließlich die natürlichen Sprachen in Problemlösungsprozessen verwendet. Das kann jedoch in problemspezifischen Sprachen weitaus konsequenter geschehen; vor allem dann, wenn diese Sprachen zu einem Kalkül ausgereift sind. Das kalkülgestützte Denken ist für Problemlösungsprozesse besser geeignet, und es ist durchaus möglich, daß Probleme von einer gewissen Komplexität damit überhaupt erst lösbar werden.

Daran ist gar nichts Erschreckendes, weil ja auch Kalküle — von inhaltlichen Vorstellungen ausgehend — durch den Menschen mit Hilfe der Allgemeinsprache geschaffen werden, weil ihr Einsatz kontrollierbar ist, und weil sich die Eingangs- und Ausgangssituationen prinzipiell aus einer problemspezifischen Sprache in die Allgemeinsprache zurückübersetzen lassen.

Der vorstehend skizzierte Ansatz erlaubt auch, die mathematischen Lehrsätze, die in zusammengehörigen Gruppen miteinander verbunden den Inhalt der Disziplinen der Mathematik bilden, vom Standpunkt des Systems der Wissenschaften aus sinnvoll zu bewerten, so daß die Deutung dem tatsächlichen Gebrauch der Lehrsätze entspricht und zu neuem Gebrauch herausfordert. Dazu ist vor allem an die Folgen von Teilschritten zu erinnern, die das Problemlösen ermöglichen oder erleichtern. In komplizierten Problemen treten sehr lange Ketten von Teilschritten auf, sogar Netze von Teilschritten, die schwer zu überschauen sind. In der Regel lassen sich — gestützt auf Kalküle — Theoreme beweisen, die insbesondere Aussagen der folgenden Art enthalten:

Unter Voraussetzungen (Eingangssituationen) der Art X sind mit logischer Sicherheit Ausgangssituationen der Art Y zu erwarten (oder auszuschließen) oder in ihrer Güte als eindeutig bzw. nicht eindeutig zu klassifizieren. Unter „Voraussetzungen der Art X“ sind dabei Arrangements von Informationen über Problemsituationen zu verstehen, die gewissermaßen Standardcharakter haben, die also häufig vorkommen. Probleme können jetzt auch so umgeformt werden, daß die vollständige oder teilweise Re-

Abb. 6 Carl Friedrich v. Weizsäcker (geb. 1912), Physiker und Philosoph, Mitunterzeichner des sog. Göttinger Appells, äußerte 1959 in einem Vortrag: „Das, was die Formel in der Mathematik vor allem leistet, ist wohl, daß sie etwas, was wir abstrakt kaum mehr zu denken vermöchten, optisch herausstellt und in der Gestalt des Sichtbaren nun so durchschaubar macht, daß wir damit wieder umgehen können. Die Formel ist das Resultat der Unentbehrlichkeit von optischer Anschauung... Vieles, das sich sonst nicht mehr bewältigen ließe, können wir bei anschaulicher Vergewärtigung durch die Formelsprache noch behandeln.“



duzierbarkeit eines vorgefundenen Problems auf Problemlage X nachweisbar ist. In Theoremen sind bestimmte Standardsituationen ein für allemal geklärt, so daß bei künftigen Bedarf an bestimmten Lösungsschritt-Ketten oder -Netzen Aufwand gespart wird.

Mathematik und Unschärfe

Die Mathematik ist also nicht die Theorie des Quantitativen. Wie andere Theorien auch enthält sie Aussagen über Zusammenhänge von Quantitativem und Qualitativem sowie über Zusammenhänge von quantitativen Bestimmungen untereinander und von qualitativen Bestimmungen untereinander. Natürlich offenbaren manche Teile der Mathematik ihre volle Leistungsfähigkeit erst dann, wenn sie im Rahmen zahlenmäßiger Charakteristiken der Realität, in numerisch qualifizierten Beschreibungen angewandt werden. Ein solcher Rahmen ist nicht immer vollständig gegeben. Das schließt jedoch den Gebrauch mathematischer Sprachmittel nicht aus. Mit ihrer Hilfe kann man Übersichten über mögliche Realzusammenhänge erzeugen, welche die Form haben: Angenommen, es ist $x = x_0, x_1, x_2, \dots$, so nimmt y den Wert y_0 bzw. y_1 bzw. $y_2 \dots$ an. Diese Übersichten können für praktisches Handeln bedeutsam sein, wenn man Erkenntnislücken schließen und Hypothe-

sen bilden will. Man kann in diesem Fall von „heuristischem Gebrauch“ mathematischer Begriffe sprechen.

Seit langem sind die Grenzen zwischen „vollem“ und „heuristischem“ Gebrauch mathematischer Begriffe fließend: Wo nicht absolut scharfe Zahlenangaben vorliegen, kann auf strikt mathematische Weise mit „Von-bis“-Angaben operiert werden. Für den Fall, daß einerseits absolut scharfe Angaben nicht existieren können, aber andererseits mehr als nur „Von-bis“-Angaben vorliegen, wird gegenwärtig die Mathematik der sog. unscharfen Größen, Funktionen und Mengen ausgearbeitet.

Die bekannte Unschärfe der Allgemeinsprache bedeutet; Isolierte Begriffe haben häufig eine Menge unterschiedlicher Bedeutungen; eine bestimmte Bedeutung wird erst fixiert durch Restriktionen mit Hilfe von Kontextinformationen — z. B. daraus, wie der unscharfe Begriff in den Kontext eines Satzes eingebettet ist. Diese Unschärfe ist jedoch nicht nur ein Mangel. Indem sie Quelle von Assoziationen und Spielraum zum Modifizieren von Bedeutungen anhand des Erfahrungszuwachs ist, unterstützt sie das menschliche Schöpferturn.

Oben wurde ausgeführt, daß die Problemspezifität von Fachsprachen ebenfalls eine wirksame Hilfe für die schöpferische Tätigkeit des Menschen sein kann. Es ist also naheliegend, daß auch die Fachsprachen nützlichen Gebrauch von einer begrenzten Unschärfe machen.

Von der Mathematik nimmt man gemeinhin an, daß sie völlig „streng“ sei, also für Unschärfe jeglicher Art gar keinen Platz lasse. Dem ist aber nicht so. Jedem produktiven Mathematiker ist bewußt, in welchem großen Umfang er sich der Heuristik von Problemlösungsprozessen bedient; und beim Problemlösen geht es unscharf zu, schon allein dadurch, daß man sich einen Lösungsweg erfüllen muß.

Zum anderen gibt es in der Mathematik aber heute schon unscharfe Spezialsprachen, nämlich die für praktische Anwendungen sehr nützliche „Theorie der unscharfen Mengen und Systeme“²⁾ als wesentliches Entwurfsmittel für Problemlösungsprozesse und Kommunikationsmittel des Menschen mit von ihm zu überwachenden und zu steuernden komplexen Anlagen.

²⁾ In einem unserer nächsten Hefte werden wir die dieser Theorie zugrundeliegende Denkweise vorstellen.

Weiterführende Literatur

- (1) R. Thiel: „Mathematik — Sprache — Dialektik“, Berlin 1975
- (2) M. Peschel: „Modellbildung für Signale und Systeme“, Berlin 1978
- (3) R. Thiel: „Quantität oder Begriff?“, Berlin 1967
- (4) F. Klitz: „Information und Verhalten“, Berlin 1973
- (5) F. Klitz: „Erwachendes Denken“, Berlin 1980
- (6) A. V. Petrovskij: „Allgemeine Psychologie“, Berlin 1974
- (7) H. Hörmann: „Psychologie der Sprache“, Berlin, Heidelberg, New York 1970
- (8) S. L. Rubinstein: „Das Denken und die Wege seiner Erforschung“, Berlin 1961
- (9) F. Engels: „Herrn Eugen Dürings Umwälzung der Wissenschaft“, in: MEW Bd. 20, S. 36
- (10) W. Krause: „Problemlösen — Stand und Perspektiven“, Zentrallinstitut für Kybernetik und Informationsprozesse der AdW der DDR, Berlin 1978